Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a ; b ; c tels que :

$\forall x \in D_f$; $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

2) En déduire une primitive de f.

solution.

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+3x+1-1-3}{(x+1)^2}$$

- on constate que $x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$

$$f(x) = \frac{(x+1)^3-4}{(x+1)^2}$$

donc $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x+1)^2} - \dfrac{4}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x+1-\frac{4}{(x+1)^2}$$

donc $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-4 \end{cases}$

2) la primitive de f est :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2+x+\frac{4}{x+1}$$

Exercice 3 -

On pose, pour tout entier naturel n, non nul :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

1) Montrer que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa primitive F telle que $F(0) = 1$

2) Ecrire $F(x)$ sous forme d'un quotient, en déduire une expression simple de $f(x)$.

Solution

$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

1) f est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

alors f admet des primitives dans $\mathbb{R}$ dont :

$F(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + K$

si $F(0) = 1$ on a $K = 1 \Rightarrow F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

2) $F(x)$ est la somme d'une suite géométrique de 1ère terme 1 et de raison $q = x$ (nombre de termes : $n+1$

$$\begin{cases} x \neq 1 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \\ x = 1 \Rightarrow F(1) = n + 1 \end{cases}$$

- si $x \neq 1$, $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - 1(x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

- Si $x = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

$f(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Somme d'une suite arithmétique, $f(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Conclusion :

$$\begin{cases} x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = \dfrac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

C'est une forme réduite de $f(x)$.

Aminetou / Mohamed yeslem

Exercice 6 : Page 54

Pour tout entier naturel on pose $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$

1/ Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n)

2/ Montrer que la suite (U_n) est décroisante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

3/ Montrer que la sui $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

---

solution :

$$U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$$

1. a/ La fonction ($t \longrightarrow \frac{t^n}{1+t^2}$) est rationnelle et continue sur $[0,1]$ pour tout n. Alors l'integrale U_n existe, D'où l'ecriture définit bien une suite numerique

2/ $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^{n+1}}{t^2+1} \leq \frac{t^n}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq U_n \ ; \ \forall n.$$

Alors U_n est décroissante et positive

Donc minorée (par zéro) et décroissante

Donc (U_n) est convergente.

3/ $0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq t^2+1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{t^2+1} \leq t^n.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2} t^n dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

d'après la Théorème de gendarme $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$

Aminetou / Mohamed yeslem .

Exercice 8 : Page 55

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x \, dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x \, dx$

1/ calculer $I+J$.

2/ En utilisant une intégration par parties ; calcul $I-J$

3/ En deduire I et J.

Solution

1/ $I+J = \int_0^{\pi/2} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)\, dx$.

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx$.

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx$.

$I+J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I+J = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right)$

$\boxed{I+J = \frac{\pi^2}{8}}$

2/ On a $I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x - x\cos^2 x)\, dx$

$I-J = \int_0^{\pi/2} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\, dx$.

$I-J = \int_0^{\pi/2} (-x\cos 2x)\, dx$.

On utilise une Intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$.

Alors : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Comme :

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

$I-J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I-J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\, dx$

$I-J = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I-J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I-J = \frac{1}{2}}$

On résout le système : $\begin{cases} I+J = \frac{\pi^2}{8} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases}$.

par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2+4}{16}}$

Par soustraction : $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi^2-4}{16}}$

Exo 11 :

Soit f la fonction d'une variable réelle x définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1°) Etudier les variations de f et représenter Γ. Montrer que Γ est un arc d'un cercle **C** à préciser.

2°) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. Donner sa valeur sans calculs.

3°) En posant $x=\cos t$, calculer I et comparer avec le résultat précédent.

Solution :

1) $\sqrt{1-x^2}\geq 0$

$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1$

$\Rightarrow x=-1$ ou $x=1$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2+1	$-$	$+$	$-$	

$D_f=[-1,1]$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$$

f non dérivable en -1 et Γ admet en ce point une tangente verticale

$\forall x\in\ ]-1,1[$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\lim\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\infty$$

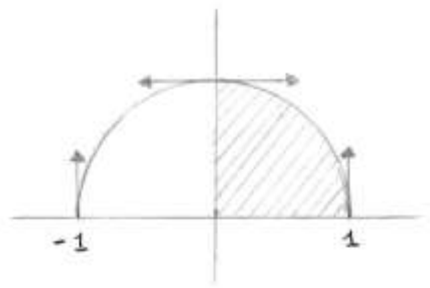
f non dérivable en 1 et Γ admet en ce pt une tangente verticale $\forall x\in\ ]-1,1[$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$y = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ donc Γ est un arc d'un cercle C

2) l'interprétation géométrique de l'intégral

I c'est une aire du domaine delimité par Γ ; (ox) et les domaine d'equation $x = 0$ et $x = 1$.

la valeur de I :

* $\frac{1}{4}$ de l'aire dans cercle de rayon 1

$\Rightarrow * \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \times 1^2}{4}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

3) $x = \cos t$

$\Rightarrow dx = -\sin t \, dt$

si

$x = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$x = 1 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t} \, dt \, (-\sin t \, dt)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$